

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ

дисципліна Теорія ймовірностей
та математична статистика
(шифр і назва навчальної дисципліни)

спеціальність 123 Комп'ютерна інженерія
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж
(назва освітньої програми)

відділення Комп'ютерних технологій та систем
(назва відділення)

Розробив: Буряк Г.І.

Розглянуто та схвалено
на засіданні циклової комісії

математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії _____ Малик О.М.

Розділ 6. Багатовимірні випадкові величини

У попередніх розділах ми розглядали випадкові величини (дискретні та неперервні), їх закони розподілу та числові характеристики. У прийнятому теоретико-множинному трактуванні будь-яка випадкова величина X є функцією елементарної події, яка входить у простір елементарних подій. Але в прикладних задачах зазвичай доводиться розглядати не одну, а декілька випадкових величин, які одночасно вимірюються (спостерігаються) в одному й тому ж експерименті. При цьому з кожною елементарною подією пов'язана система (сукупність) двох чи більше випадкових величин. Наприклад, успішність студента характеризується системою n випадкових величин, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – оцінки, отримані ним у семестрі. Такі питання, а також функції випадкових аргументів розглянемо в цьому розділі.

6.1. Функція одного випадкового аргумента, її розподіл та числові характеристики

Означення. Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , то Y називають **функцією випадкового аргумента X** :

$$Y = \varphi(X).$$

Розглядають такі функції як дискретні, так і неперервні, на чому і зупинимось далі.

Нехай X – дискретна випадкова величина. Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають різні значення функції Y , то ймовірності відповідних значень X і Y різні. Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають значення Y , серед яких є рівні між собою, то ймовірності рівних значень Y додаються.

Нехай дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

і $Y = \varphi(X)$.

Тоді справедливі такі формули:

$$M(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(x_k) p_k; \quad (6.1)$$

$$D(\varphi(X)) = \sum_k \varphi^2(x_k) p_k - (M(\varphi(X)))^2. \quad (6.2)$$

Нехай X – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x)$, а $Y = \varphi(X)$. Якщо $y = \varphi(x)$ – диференційовна, строго зростаюча або строго спадна функція, обернена до якої має вигляд $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \varphi(X)$ обчислюють за формулою

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \quad (6.3)$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі можливих значень X не монотонна, то потрібно розбити цей інтервал на такі інтервали, на яких $\varphi(x)$ монотонна, знайти щільності розподілів $g_i(y)$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім подати $g(y)$ у вигляді суми

$$g(y) = \sum_i g_i(y).$$

Числові характеристики випадкової величини Y обчислюють за формулами:

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx;$$

$$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(X)))^2.$$

Зокрема, якщо можливі значення X належать інтервалу (a, b) , то

$$M(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx;$$

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - (M(\varphi(X)))^2.$$

Приклад 1. Дана дискретна випадкова величина X

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
P	0,3	0,5	0,2

та $Y = \sin X$. Знайти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

Розв'язання. Знаходимо розподіл випадкової величини Y :

$$y_1 = \sin 0 = 0, \quad y_2 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad y_3 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Y	0	$\frac{1}{2}$	1
P	0,3	0,5	0,2

$$M(Y) = 0 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = 0,45;$$

$$M(Y^2) = 0 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = 0,325;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 0,325 - (0,45)^2 = 0,1225;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,1225} = 0,35.$$

Приклад 2. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ àà } x > 1; \\ 2x, & 0 < x \leq 1; \end{cases} \quad Y = X^2.$$

Знайти $M(Y)$, $D(Y)$.

Розв'язання.

$$M(Y) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$M(Y^2) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^5 dx = \frac{x^6}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Приклад 3. Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , можливі значення якої належать інтервалу $(0, +\infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \ln X$.

Розв'язання. Функція $y = \ln x$ монотонна в інтервалі $(0, +\infty)$, отже має обернену функцію $x = e^y$, звідки $x' = e^y$. Тоді за формулою (6.3) отримаємо:

$$g(y) = e^y f(e^y), \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

Приклад 4. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	-1	1	2
P	0,1	0,5	0,4

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Можливі значення Y : $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$. Значення $y_1 = y_2$ рівні між собою. Ймовірність цього значення $p_1 = 0,1 + 0,5 = 0,6$. Одержимо розподіл Y :

Y	1	4
P	0,6	0,4

6.2. Функція двох випадкових аргументів

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z , то Z називають **функцією двох випадкових величин** X і Y :

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Закон розподілу суми $Z = X + Y$ за відомими розподілами доданків

1. Нехай X і Y – дискретні незалежні випадкові величини. Можливі значення $Z = X + Y$ дорівнюють сумах кожного можливого значення X та кожного можливого значення Y ; імовірності можливих значень дорівнюють добуткам імовірностей доданків.

2. Якщо X і Y – неперервні незалежні випадкові величини, які мають відповідно щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ за умови, що щільність розподілу принаймні одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ можна знайти за формулою

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx$$

або за рівносильною формулою

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z - y) f_2(y) dy.$$

Функція $g(z)$, утворена з функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$ за наведеними формулами, називається **згортою** або **композицією** цих функцій.

Якщо можливі значення аргументів не від'ємні, то щільність розподілу суми $Z = X + Y$ обчислюють за формулою

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$$

або за рівносильною формулою

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y) f_2(y) dy.$$

Зауваження. Сума незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл. Математичне сподівання і дисперсія цієї суми відповідно дорівнюють суммам математичних сподівань і дисперсій доданків.

Приклад 5. Для незалежних випадкових величин X і Y відомі щільності їх розподілів

$$f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \quad (0 \leq x < \infty), \quad f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. За формулою $g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$ обчислимо:

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{(z-x)}{5}} dx = \frac{1}{15} e^{-\frac{z}{5}} \int_0^z e^{\frac{2x}{15}} dx = \frac{1}{15} e^{-\frac{z}{5}} \left(-\frac{15}{2} e^{\frac{2x}{15}} \right) \Bigg|_0^z = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{5}} \left(1 - e^{-\frac{2z}{15}} \right).$$

Оскільки можливі значення X і Y невід'ємні і $Z = X + Y$, то $z \geq 0$. Отже,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{5}} \left(1 - e^{-\frac{2z}{15}} \right), & 0 \leq z < +\infty; \\ 0, & -\infty < z < 0. \end{cases}$$

6.3. Двовимірні випадкові величини

Випадкові величини, які входять у систему $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, можуть бути як дискретними, так і не дискретними (неперервними або мішаними).

Приклад 6. Експеримент полягає у підкиданні двох монет. Елементарною подією буде випадання герба і положення монет одна відносно одної. Нехай випадкова величина X – кількість гербів, які випали, а випадкова величина Y – відстань між монетами. У цьому разі X – дискретна випадкова величина, яка набуває значень 0, 1, 2, а Y – неперервна випадкова величина із значеннями в R .

Для наочності дослідження n -вимірних випадкових величин зручно користуватися геометричною інтерпретацією. Так, систему двох випадкових величин (X, Y) можна зобразити *випадковою точкою* на площині Oxy з координатами X та Y , або, що рівносильно, *випадковим вектором*, напрямленим з початку координат у точку (X, Y) . Аналогічно, систему трьох випадкових величин (X, Y, Z) можна зобразити в тривимірному просторі як випадковий вектор, напрямлений з початку координат у точку (X, Y, Z) .

Якщо вимірність величини більше від 3, то геометрична інтерпретація втрачає наочність, але користуватися геометричною термінологією зручно. Так, про систему випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ будемо казати як про випадкову точку в n -вимірному просторі R^n або як про випадковий вектор, напрямлений з початку координат у точку $(X_1, X_2, \dots, X_n)$: $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

На n -вимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які було розглянуто для одновимірної випадкової величини.

Очевидно, що властивості n -вимірної випадкової величини не обмежуються властивостями окремих складових випадкових величин; суттєві також зв'язки між складовими величинами.

Повна характеристика n -вимірної випадкової величини – її закон розподілу, що як і для окремих випадкових величин може мати різні форми: функція розподілу, щільність розподілу, таблиця ймовірностей окремих значень випадкового вектора тощо.

Для практики важливий випадок $n = 2$, яким ми обмежимося в подальшому.

Функцією розподілу ймовірностей (або сумісною функцією розподілу) двовимірної випадкової величини (X, Y) називається така функція двох аргументів x, y , яка визначає ймовірність сумісного настання подій

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Подія в дужках означає добуток подій: $(X < x, Y < y) = (X < x) \cap (Y < y)$.

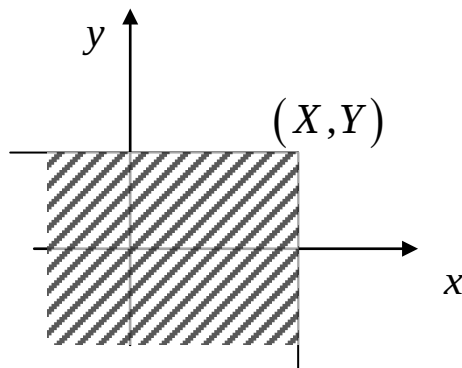


Рис. 5.3. Нескінченний прямокутник із вершиною в точці (X, Y)

Користуючись геометричною інтерпретацією двовимірної випадкової величини (X, Y) як випадкової точки на площині, можна дати геометричне тлумачення функції розподілу: це ймовірність влучення в нескінченний прямокутник із вершиною в точці (X, Y) (рис. 5.3), який лежить лівіше і нижче від неї.

Властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) аналогічні властивостям одновимірної випадкової величини:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2. Неперервність зліва за кожним аргументом:

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} F(x, y) = F(x_1, y); \quad \lim_{y \rightarrow y_1 - 0} F(x, y) = F(x, y_1).$$

3. Функція $F(x, y)$ – неспадна функція за кожним аргументом:

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ якщо } x_1 < x_2 \text{ та } F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ якщо } y_1 < y_2.$$

4. $F(x, +\infty) = F_1(x)$ – функція розподілу компонента X , $F(+\infty, y) = F_2(y)$ – функція розподілу компонента Y (властивість встановлює природний зв'язок між функцією розподілу двовимірної випадкової величини і функціями розподілу $F_1(x)$, $F_2(y)$, які також називають частинними функціями одновимірних випадкових величин X і Y).

5. $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

6. Ймовірність потрапляння випадкової точки до прямокутника $(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2)$ обчислюють за формулою

$$P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)).$$

6.3.1. Дискретні двовимірні випадкові величини

Означення. Двовимірну випадкову величину називають **дискретною**, якщо множина значень, яких вона може набути, скінченна або зліченна.

Означення. Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини (x_i, y_k) та їх імовірностей $p(x_i, y_k)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Закон розподілу такої випадкової величини задають таблицею:

$X \backslash Y$	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Σ
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{m1}	q_1
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{m2}	q_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_n	p_{1n}	p_{2n}	$\dots$	p_{mn}	q_n
Σ	p_1	p_2	$\dots$	p_m	1

Причому $q_1 = \sum_{i=1}^m p_{i1}$, $q_2 = \sum_{i=1}^m p_{i2}$, $\dots$, $q_n = \sum_{i=1}^m p_{in}$; $p_1 = \sum_{i=1}^n p_{1i}$, $p_2 = \sum_{i=1}^n p_{2i}$, $\dots$, $p_m = \sum_{i=1}^n p_{mi}$.

Події $(X = x_i, Y = y_k)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$ утворюють повну групу, тому сума ймовірностей наведеної таблиці дорівнює 1. Додаючи ймовірності стовпчиків і рядків, одержують закони розподілу компонентів X і Y :

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
P	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
P	q_1	q_2	$\dots$	q_n

6.3.2. Неперервні двовимірні випадкові величини

Означення. Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають **неперервною**, якщо вона набуває значення в усіх точках деякої області площини Oxy , що рівносильно існуванню такої функції $f(x, y)$, за якої функцію розподілу $F(x, y)$ можна подати у вигляді

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Означення. Функцію $f(x, y)$ називають **щільністю розподілу ймовірностей** двовимірної випадкової величини (X, Y) .

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна, то

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Властивості функції щільності розподілу ймовірностей:

1. $f(x, y) \geq 0$ за всіх x, y .

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

3. Якщо D – будь-яка область у площині Oxy , то

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Знаючи щільність розподілу $f(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y) , знаходять щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ для її компонентів X та Y . Справді, функція розподілу випадкової величини X

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Диференціюючи обидві частини рівності за x , отримаємо:

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Аналогічно, $F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ та

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Теорема. Випадкові величини X та Y незалежні тоді і тільки тоді, коли функція розподілу пари (X, Y) дорівнює добутку функцій розподілу компонентів:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Наслідок. Неперервні випадкові величини X і Y незалежні тоді і тільки тоді, коли щільність розподілу ймовірностей пари (X, Y) дорівнює добутку щільностей розподілу ймовірностей компонентів:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Приклад 7. Задано дискретну двовимірну випадкову величину:

$Y \backslash X$	1	2	3	Σ
0	0,1	0	0,1	0,2
2	0	0,3	0,3	0,6
5	0,2	0	0	0,2
Σ	0,3	0,3	0,4	1

Знайти закони розподілу компонент X і Y .

Розв'язання. Додаючи стовпчики і рядки таблиці ймовірностей, отримують відповідні закони розподілу випадкових величин X і Y :

X	1	2	3
P	0,3	0,3	0,4

Y	0	2	5
P	0,2	0,6	0,2

Приклад 8. Функцію розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) задано формулою:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \text{ \& \& \& } y < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x, y)$.

Розв'язання. Використовуємо формулу $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, тому обчис-

люємо $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{cases} 4e^{-4x}(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \text{ \& \& \& } y < 0, \end{cases}$ тоді

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) = \begin{cases} 8e^{-4x}e^{-2y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \text{ \& \& \& } y < 0. \end{cases}$$

Приклад 9. За відомою щільністю розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$$

знайти її функцію розподілу $F(x, y)$.

Розв'язання. Обчислення проводимо згідно з формулою

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)} dx dy = \frac{20}{\pi^2} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{4^2+x^2} \int_{-\infty}^y \frac{dy}{5^2+y^2} = \\ &= \frac{20}{\pi^2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} \right) \Big|_a^x \cdot \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} \right) \Big|_b^y = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{4} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{a}{4} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{5} - \lim_{b \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, функція розподілу має вигляд

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2} \right).$$

6.3.3. Числові характеристики двовимірної випадкової величини. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина, для якої закон розподілу задано таблицею розподілу. Тоді, додаючи стовпчики і рядки таблиці ймовірностей, знаходять закони розподілу компонентів X і Y . Відповідно обчислюють їх числові характеристики.

Згідно з даними прикладу 1 п. 6.3.2 можемо визначити числові характеристики кожного компонента:

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 2;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,3 - 4 = 4,6 - 4 = 0,6;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,6} = 0,7746.$$

Аналогічні обчислення для компонента Y :

$$M(Y) = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 = 1,5;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 - 2,25 = 2,5 - 2,25 = 0,25;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,25} = 0,5.$$

Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x, y)$. Якщо $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – щільності розподілу її компонентів X і Y , то за означенням математичного сподівання одновимірної випадкової величини

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy.$$

Підставивши $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ отримаємо:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy.$$

Якщо $f(x, y)$ набуває значення в деякій області D площини Oxy , то

$$M(X) = \iint_D x f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \iint_D y f(x, y) dx dy.$$

Означення. Коваріацією (кореляційним моментом) випадкових величин X і Y називається математичне сподівання добутку різниць випадкових величин і їх математичних сподівань:

$$K(X, Y) = \text{cov}(X, Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))).$$

Після розкриття дужок

$$K(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y).$$

З останньої формули випливає, що для дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$K(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j p_{ij} - \sum_{i=1}^m x_i p_i \sum_{j=1}^n y_j q_j$$

та для неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y)

$$K(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy.$$

Якщо $f(x, y)$ набуває значення в деякій області D площини Oxy , то

$$K(X, Y) = \iint_D xy f(x, y) dx dy - \iint_D x f(x, y) dx dy \iint_D y f(x, y) dx dy.$$

Означення. Дисперсією (дисперсійною матрицею) двовимірної випадкової

величини (X, Y) називається сукупність чотирьох чисел d_{ik} , ($d_{ik} = d_{ki}$), яка є матрицею другого порядку:

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді, у разі двовимірної неперервної випадкової величини для елементів матриці

$$d_{11} = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - (M(X))^2,$$

$$d_{22} = D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(Y))^2 f_1(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_1(y) dy - (M(Y))^2,$$

$$d_{12} = d_{21} = K(X, Y),$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - (M(X))^2,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - (M(Y))^2.$$

Якщо $f(x, y)$ набуває значення в деякій області D площини O_{xy} , то

$$D(X) = \iint_D (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy - (M(X))^2,$$

$$D(Y) = \iint_D (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy - (M(Y))^2.$$

Точка $(M(X), M(Y))$ називається *центром розсіювання* двовимірної випадкової величини.

Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K(X, Y) = 0$ і дисперсійна матриця є діагональною матрицею:

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} D(X) & 0 \\ 0 & D(Y) \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що коваріація є характеристикою зв'язку між величинами системи (X, Y) . Коваріація описує не тільки зв'язок між X і Y , а також і їх розсіювання. Дійсно, якщо принаймні одна з величин мало відрізняється від свого математичного сподівання, то коваріація буде малою, як би не були зв'язані між собою випадкові величини X і Y .

Істотний недолік коваріації – те, що її розмірність збігається з добутком розмірностей випадкових величин, тому замість коваріації використовують безрозмірну величину – *коефіцієнт кореляції*, який характеризує *тісноту зв'язку* між величинами X і Y .

Означення. Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається число

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції

Теорема 1. Для будь-яких випадкових величин $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Теорема 2. Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y дорівнює ± 1 тоді і тільки тоді, коли X і Y зв'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$, причому $\rho(X, Y) = 1$ за $a > 0$, $\rho(X, Y) = -1$ за $a < 0$.

Теорема 3. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $\rho(X, Y) = 0$.

Наслідок. Якщо $\rho(X, Y) \neq 0$, то X і Y залежні випадкові величини.

Означення. Випадкові величини X і Y , для яких $\rho(X, Y) = 0$, називаються **некорельованими**, для яких $\rho(X, Y) \neq 0$ називаються **корельованими**.

Зауваження. З некорельованості двох випадкових величин, взагалі кажучи, не випливає їх незалежності. Для нормально розподілених випадкових величин некорельованість рівносильна незалежності.

Коефіцієнт кореляції служить для оцінювання тісноти лінійного зв'язку між випадковими величинами X і Y : що ближче модуль коефіцієнта кореляції до одиниці, то зв'язок сильніший, що ближче модуль коефіцієнта кореляції до нуля, то зв'язок слабший.

Приклад 10. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) задана щільністю розподілу

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де область D обмежена прямими $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 6.1). Знайти числа A , $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $K(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.

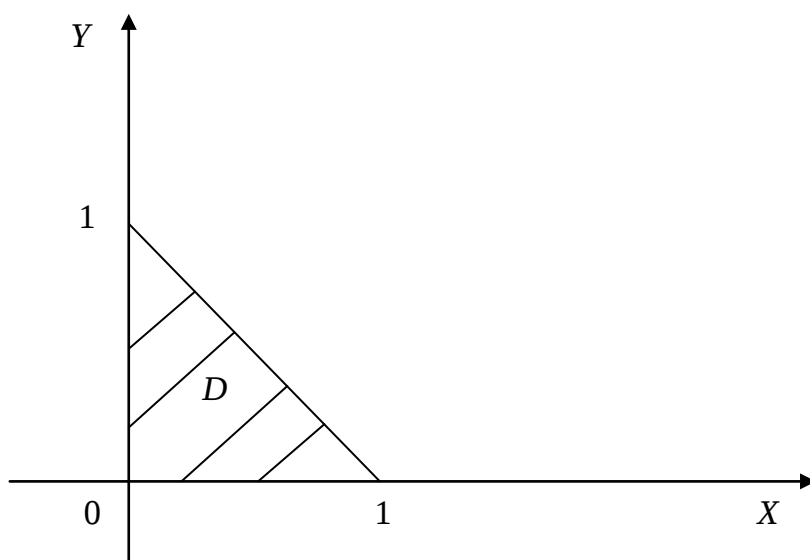


Рис. 6.1. Задання області D

Розв'язання. Оскільки $f(x, y)$ набуває значення в області D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Одержимо } \iint_D Axy dx dy &= A \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = A \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{A}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \\ &= \frac{A}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{A}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{A}{24}; \quad \frac{A}{24} = 1 \text{ і звідси } A = 24. \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Визначимо числові характеристики:

$$\begin{aligned} M(X) &= \iint_D xf(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y dy = 24 \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = 12 \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \\ &= 12 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = 12 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5}; \\ M(Y) &= \iint_D yf(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 y^2 dy \int_0^x x dx = \frac{2}{5}; \end{aligned}$$

$$M(X^2) = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^3 dx \int_0^{1-x} y dy = 24 \int_0^1 x^3 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = 12 \int_0^1 x^3 (1-x)^2 dx =$$

$$= 12 \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx = 12 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5};$$

$$M(Y^2) = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 y^3 dy \int_0^{1-y} x dx = \frac{1}{5};$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{5};$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}; \quad \sigma(Y) = \frac{1}{5};$$

$$M(XY) = \iint_D xy f(x, y) dx dy = 24 \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = 24 \int_0^1 x^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx = 8 \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx =$$

$$= 8 \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx = 8 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15};$$

$$K(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{75};$$

$$\rho(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = -\frac{2}{3}.$$

6.3.4. Лінійна регресія

Означення. Пряма $y = \alpha_1 x + \alpha_0$ називається *прямою регресії* (або прямою середньоквадратичної регресії) Y на X , якщо коефіцієнти α_1 і α_0 вибрано так, щоб середнє квадратичне відхилення $\alpha_1 X + \alpha_0$ від Y було мінімальним:

$$M(Y - \alpha_1 X - \alpha_0)^2 = \min.$$

Аналогічно визначається пряма регресії X на Y .

Тоді коефіцієнти α_1 і α_0 набувають таких значень:

$$\alpha_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \alpha_0 = M(Y) - \alpha_1 M(X).$$

Коефіцієнт α_1 називається коефіцієнтом регресії Y на X . Рівняння прямої регресії Y на X має вигляд

$$y = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x + M(Y) - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} M(X)$$

або

$$y - M(Y) = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - M(X)).$$

Аналогічно пряма регресії X на Y має вигляд

$$x - M(X) = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - M(Y)).$$

Обидві прямі регресії проходять через точку $(M(X), M(Y))$ – центр розсіювання двовимірної випадкової величини. Прямі регресії збігаються тоді і тільки тоді, коли $\rho = \pm 1$.

Величина $(1 - \rho^2)\sigma_y^2$ називається залишковою регресією Y на X . Вона характеризує величину похибки у разі заміни Y на $\alpha_1 X + \alpha_0$.

Приклад 11. Двовимірна дискретна випадкова величина (X, Y) задана таблицею розподілу

$Y \backslash X$	1	2	4	Σ
0	0,1	0	0,1	0,2
2	0	0,3	0,3	0,6
5	0,2	0	0	0,2
Σ	0,3	0,3	0,4	1

Знайти рівняння прямих регресії Y на X та X на Y .

Розв'язання. Додаючи стовпчики і рядки таблиці ймовірностей, знаходимо закони розподілу випадкових величин X і Y :

X	1	2	4
p	0,3	0,3	0,4

Y	0	2	5
p	0,2	0,6	0,2

Тоді

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 2,5;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,4 - 2,5^2 = 7,9 - 6,25 = 1,65;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,65} \cong 1,2845;$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,2 = 2,2;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 4 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,2 - 2,2^2 = 7,4 - 4,84 = 2,56;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{2,56} = 1,6;$$

$$M(XY) = 1 \cdot 0 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 2 \cdot 0,3 + \\ + 1 \cdot 5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 0 = 4 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 4,6;$$

$$K(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 4,6 - 2,5 \cdot 2,2 = -0,9;$$

$$\rho(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0,9}{1,2845 \cdot 1,6} = -0,438;$$

$$\rho \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0,438 \cdot \frac{1,6}{1,2845} = -0,5456; \quad \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0,438 \cdot \frac{1,2845}{1,6} = -0,3516.$$

Рівняння прямої регресії Y на X :

$$y - 2,2 = -0,5456(x - 2,5) \text{ (пряма 1 на рис. 6.2).}$$

Рівняння прямої регресії X на Y :

$$x - 2,5 = -0,3516(y - 2,2) \text{ або } x = -0,3516y + 3,2735 \text{ (пряма 2 на рис. 6.2).}$$

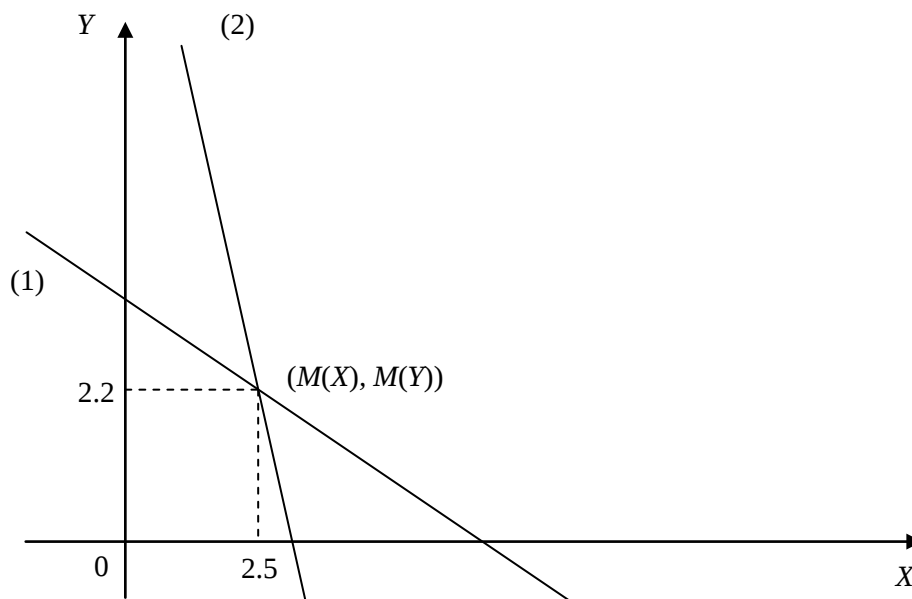


Рис. 6.2. Прямі регресії

6.4. Умовні закони розподілу

Поняття умовної ймовірності події розглядали в розділі 2 і ймовірність події A за умови, що відбулась подія B , обчислюється за формулою (2.1), якщо $P(B) \neq 0$.

6.4.1. Умовні закони розподілу компонентів дискретної двовимірної випадкової величини

Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина, закон розподілу якої задають таблицею

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Σ
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{m1}	q_1
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{m2}	q_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_n	p_{1n}	p_{2n}	$\dots$	p_{m0}	q_n
Σ	p_1	p_2	$\dots$	p_m	1

Припустимо, що в результаті випробування величина Y набула значення $Y = y_j$, при цьому X набуде одного із своїх можливих значень $x_1, x_2, \dots, x_m$. Позначимо умовну ймовірність того, що X набуде значення x_i за умови, що $Y = y_j$ через $p(x_i | y_j)$.

Означення. Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X за фіксованого значення випадкової величини $Y = y_j$ називають множину можливих значень випадкової величини X та відповідних їм умовних імовірностей, обчислених за фіксованого значення $Y = y_j$, тобто розподіл

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
$p(X y_j)$	$p(x_1 y_j)$	$p(x_2 y_j)$	$\dots$	$p(x_m y_j)$

Умовні ймовірності $p(x_i | y_j)$ обчислюють за формулою

$$p(x_i | y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j} \quad (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n).$$

Аналогічно визначається умовний закон розподілу компоненти Y за $X = x_i$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$p(Y x_i)$	$p(y_1 x_i)$	$p(y_2 x_i)$	$\dots$	$p(y_n x_i)$

$$p(y_j | x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i} \quad (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n).$$

6.4.2. Умовні закони розподілу компонентів неперервної двовимірної випадкової величини

Нехай задана двовимірна неперервна випадкова величина (X, Y) . Як і для двовимірної дискретної випадкової величини, для двовимірної неперервної випадкової величини розглядають умовні закони розподілу. Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин X, Y , що утворюють вектор (X, Y) , визначаються умовними щільностями ймовірностей.

Означення. Умовною щільністю $\varphi(x|y)$ розподілу компоненти X за даного значення $Y = y$ називається відношення щільності розподілу двовимірної випадкової величини $f(x, y)$ до щільності розподілу $f_2(y)$ компоненти Y :

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Аналогічно визначається умовна щільність компоненти Y за $X = x$:

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Приклад 12. Ця дискретна випадкова величина має розподіл, що визначається (X, Y) таблицею розподілу

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3	Σ
4	0,1	0,15	0,2	0,45
5	0,15	0,25	0,15	0,55
Σ	0,25	0,4	0,35	1

Знайти:

- 1) умовний закон розподілу випадкової величини X за $Y = 4$;
- 2) умовний закон розподілу випадкової величини Y за $X = 2$.

Розв'язання 1. Знаходимо

$$p(x_1 | y_1) = \frac{p_{11}}{p_1} = \frac{0,10}{0,45} = \frac{2}{9}; \quad p(x_2 | y_1) = \frac{p_{21}}{p_1} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{3}{9};$$

$$p(x_3 | y_1) = \frac{p_{31}}{p_1} = \frac{0,20}{0,45} = \frac{4}{9}.$$

Отже,

X	1	2	3
$p(X y_1)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

Розв'язання 2. Аналогічно обчислимо для випадкової величини Y за $X = 2$.

$$p(y_1 | x_2) = \frac{p_{21}}{q_2} = \frac{0,15}{0,4} = \frac{3}{8}; \quad p(y_2 | x_2) = \frac{p_{22}}{q_2} = \frac{0,25}{0,4} = \frac{5}{8}.$$

Отже,

Y	4	5
$p(Y x_2)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

6.5. Приклади деяких важливих для практики двовимірних розподілів випадкових величин

Двовимірний біномний розподіл. Двовимірна випадкова величина (X_1, X_2) має двовимірний біномний розподіл з параметрами (n, p_1, p_2) , $0 < p_i < 1$, $p_1 + p_2 = 1$, якщо

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}, \quad k_1 + k_2 = n.$$

Двовимірний біномний розподіл – окремий випадок поліномного розподілу.

Поліномний розподіл – багатовимірний аналог біномного розподілу.

Двовимірний рівномірний розподіл в області D . Двовимірний рівномірний розподіл в області D визначається щільністю

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

де S_D – площа області D , тобто щільність сумісного розподілу зберігає стале значення в області D , якій належать усі можливі значення випадкового вектора (X, Y) .

Двовимірний експоненціальний розподіл. Означення. Двовимірний випадкова величина (X, Y) називається експоненціально розподіленою, якщо її функція розподілу визначається формулою:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ або } y < 0; \\ 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x} - e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y} + e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max\{x, y\}}, & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Двовимірний нормальний розподіл. Нехай X та Y – нормально розподілені і незалежні випадкові величини, задані щільностями розподілу ймовірностей

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}; \quad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Тоді на основі теореми множення щільностей маємо:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}.$$

Якщо центр розсіювання збігається з початком координат, тобто $a_1 = a_2 = 0$, тоді маємо канонічну форму двовимірного нормального розподілу:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right)}.$$

Фіксованому значенню $f(x, y) = C$ відповідає деяке стає значення показника степеня $\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = k^2$, де $k = \text{const}$, звідки отримаємо рівняння

$$\frac{x^2}{(k\sigma_1)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_2)^2} = 1,$$

яке називають рівнянням еліпса однакової щільності або еліпсом розсіювання. Осі симетрії називають головними осями розсіювання.

Нехай X та Y – *залежні нормально розподілені* випадкові величини. Тоді

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

де $\rho = \rho(x, y)$ – коефіцієнт кореляції.

Рівняння

$$\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} = k^2$$

є рівнянням еліпса з центром у точці (a_1, a_2) , а осі симетрії утворюють з віссю Ox кути, які визначаються з рівняння $\text{tg}2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$.

Орієнтація еліпсів розсіювання відносно координатних осей перебуває у прямій залежності від значення коефіцієнта кореляції. Якщо X та Y некорельовані ($\rho = 0$), то головні осі розсіювання паралельні осям координат.

Щільність розподілу для некорельованих нормальних випадкових величин

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

тобто така, як і для незалежних нормально розподілених випадкових величин. Це означає, що для них поняття некорельованості і незалежності еквівалентні.

Умовні закони нормального розподілу

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy} = \frac{1}{\sigma_2 \cdot \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left[y - a_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - a_1) \right]^2};$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[x - a_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - a_2) \right]^2}.$$

Легко бачити, що ці вирази є щільностями нормального розподілу з математичними сподіваннями

$$M[Y | X = x] = a_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - a_1) = y(x);$$

$$M[X | Y = y] = a_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - a_2) = x(y),$$

і середніми квадратичними відхиленнями $\sigma(y/x) = \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}$, $\sigma(x/y) = \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}$.